Funkcje Analityczne

10.02.2023

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania** na **osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem**, **nazwiskiem**, **numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.

Zadanie 1. (10p.)

Oblicz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^4}\,dx.$$

Zadanie 2. (10p.)

Niech $P(z) = z^5 - z + 16$.

(a) Pokaż, że wszystkie zera wielomianu P leżą w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 2\}$.

(b) Ile zer ma wielomian P w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej?

Zadanie 3. (10p.)

Oznaczmy $\Omega = D(0,1) \setminus \overline{D}(1, \sqrt{2})$.

(a) Wyznacz obraz obszaru Ω przez homografię $h(z) = \frac{z+i}{z-i}$.

(b) Znajdź odwzorowanie biholomorficzna przeprowadzające Ω na $D(0,1)$.

Zadanie 4. (10p.)

Niech $\widehat{\mathbb{C}}$ oznacza sferę Riemanna. Załóżmy, że $f \in M(\widehat{\mathbb{C}})$ oraz spełnia następujące warunki:

- $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{1,2\})$, oraz f ma biegun rzędu 1 w $z_0 = 1$ oraz biegun rzędu 2 w punkcie $z_0 = 2$.
- $\mathrm{Res}(f,1) = 1$, $\mathrm{Res}(f,2) = 2$,
- $f(0) = -1$, $f(3) = 1/2$.

(a) Znajdź ogólną postać funkcji f.

(b) Czy f może być ograniczona w otoczeniu punktu ∞? Jeśli tak, jaka ma wtedy postać?

Zadanie 5. (10p.)

Dla $R > 0$ niech $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > R\}$. Rozważmy funkcję holomorficzną $f(z) = \frac{z-2}{z+2}$.

(a) Pokaż, że istnieje $R_0 > 0$ takie, że na obszarze Ω_{R_0} istnieją dokładnie dwie holomorficzne gałęzie pierwiastka kwadratowego z funkcji f.

Uwaga: Holomorficzną gałęzią pierwiastka kwadratowego z funkcji f na Ω_R nazywamy funkcję holomorficzną g określoną na Ω_R, która spełnia $g(z)^2 = f(z)$.

(b) Niech g oznacza gałąź pierwiastka kwadratowego z f określoną na Ω_{R_0}, która przyjmuje wartość rzeczywistą dodatnią w punkcie $z = 2R_0$. Pokaż, że funkcja $h(z) = g(z)$ ma usuwalną osobliwość w nieskończoności.

(c) Niech g będzie taka jak w poprzednim punkcie. Załóżmy, że

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

jest rozwinięciem funkcji g w szereg Laurenta na Ω_{R_0}. Wyznacz współczynniki a_{-1}, a_0, a_1, a_2.

(d) Wyznacz wartość całki $\int_{\partial D(0,2R_0)} g(z)\, dz$ (okrąg, po którym całkujemy, jest zorientowany dodatnio).

Uwaga: W tym zadaniu podpunkty (b), (c), (d) można robić niezależnie od podpunktu (a).